別紙様式８

研 究 主 論 文 抄 録

論文題目　Circles holding convex polyhedra
（凸多面体を捕える円）

熊本大学大学院自然科学研究科　システム情報科学　専攻　数理科学　講座
（　主任指導　小林　治　教授　）

論文提出者　田 上　雄 一
Yuichi　Tanoue

主論文要旨

《本文》

この論文では、3次元 Euclid 空間内の「凸多面体を捕える円」(holding circle)について考察する。

凸体Ｂと円Ｃに対して、円Ｃが凸体Ｂに attach するとは、$C \cap \mathrm{int}B = \phi$ かつ $\mathrm{conv}C \cap B \neq \phi$ (intB とはＢの内部、convC とはＣの凸包を表す)が成り立つことである。凸体Ｂに attach している円Ｃが、slip out するとは、$C \cap \mathrm{int}B = \phi$ を保ちながらＢやＣに平行移動や回転移動を行うことによって $\mathrm{conv}C \cap B = \phi$ とできることをいう。円Ｃが凸体Ｂを slip out することができないとき、円Ｃは凸体Ｂを hold するといい、Ｃを holding circle という。特に、ＣがＢを hold して全く動けない状態になるとき、Ｃを fixing circle という。

1957年、A. S. Besicovitch によって単位球を網で抜け落ちないように捕えることが考えられ、1959年、H.S.M. Coxeter は単位球を hold する cage(凸多面体の辺で構成される籠)について「単位球を hold する辺の長さの和が最小となる cage は、すべての辺の長さが $\sqrt{3} = 1.732...$ である三角柱(triangular prism)、即ち、辺の長さの総和が $9\sqrt{3} = 15.59...$ である。」と予想した。しかし、1963年、A. S. Besicovitch は辺の長さの総和が $8\pi/3 + 2\sqrt{3} = 11.88...$ の cage を構成した。

最も簡単な道具である(rigid な)「円」で凸体を hold することはできるのだろうか。1995年、T. Zamfirescu は、「円によって hold される凸体は存在し、しかも、ほとんどすべての凸体が hold できる。」ことを示した。

しかし、円によって hold される具体的な例は多くは知られていない。この論文の主たる目的は正多面体(Platonic solids)を含むいくつかの基本的な凸多面体を取り上げ、これらが hold されるかどうかを調べることである。

第１章では、一辺１の正三角形を底面とする高さｈの三角錐(triangular pyramids)が円によってholdされるのは高さｈがどのような範囲にあるときかを考察した。高さｈが十分小さければ三角錐はholdされないが、$h \geqq 0.277...$ を満たせば三角錐はholdされる（定理1.2)。また、底面の三角形を等辺の長さがｔの二等辺三角形にしたとき、holdされるようなｈ とｔの関係についても論じた（定理1.4)。

第２章では、最も簡単な三角柱、即ち一辺の長さがすべて１、高さ１の三角柱が、円によってholdできることを示した（定理2.1）。三角柱が円によってholdできることは決して自明ではなく、結果は単純であるが、その証明は容易ではない。

第３章では、一般的な三角柱が円によってhold できるかどうかを考察した。鋭角三角形を底面にもつ任意の高さの三角柱は、円によってholdされることを示した（定理3.6)。また、底面が正奇数角形で高さが任意の角柱もholdされること、さらに、ある条件を満たす多角形を底面にもつ高さの十分低い角柱も hold されることについても述べた（定理 3.8)（定理3.9)。

第４章では、１辺が１である正多面体を hold する円の直径について考察した。正四面体をholdする円の直径ｄの範囲は、$0.7071... \leqq d < 0.8957...$ である(定理4.2)。正六面体、正八面体についても同様に求めた（定理4.3)(定理4.4）。正十二面体、正二十面体をholdする円の直径の範囲については未解決である。

さらに、正多面体の重心Ｏを中心とするfixing circleについて考察した。正四面体、正六面体、正八面体にはそれぞれ一種類ずつしかfixing circleが存在しないが、正十二面体には少なくとも三種類、正二十面体には二種類存在することを示した（定理 4.5)。それ以外のfixing circleの存在はわかっていない。

第５章では、関連する話題として、一辺１の正四面体が通り抜けることのできる最小直径の穴の大きさを考察した。2005年、J. ItohとT. Zamfirescuによって正四面体が通り抜けることができる最小の幅と最小の直径をもつ穴が構成された。ここでは、穴の形を円と正方形に限って同様の問題を考察した。正四面体が通り抜けることのできる円の穴の直径は、$d \geqq 0.8957...$ である（定理 5.1）。この結果は定理 4.2 の結果と同じことを示している。さらに、穴の形が正方形の場合も考察し、最小なものの対角線は１であることを示した（定理5.2）。